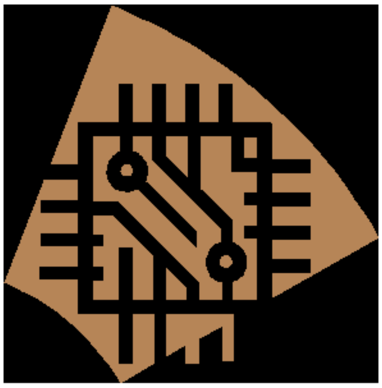
Глазько Л.Ю.

Рогинська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів
Роменського району Сумської області

Рівняння ,
які містять цілу та дробову частини числа



Рівняння зазначеного змісту зазвичай зустрічаються переважно у задачах математичних олімпіад , оскільки у програмі основної школи такий матеріал відсутній і розглядається лише на заняттях математичних гуртків . Тому цілком природньо , що при розв’язуванні рівнянь з цілою та дробовою частинами числа учні відчувають певні труднощі .

Для успішного розв’язування рівнянь такого змісту необхідно:

- знати означення цілої та дробової частини числа ;
- властивості цілої та дробової частин ;
- використовувати за необхідності обмеженість дробової частини та множину значень цілої частини ;
- володіти основними прийомами «підходу» до таких задач.

Означення . Цілою частиною $[x]$ числа x називається таке найбільше ціле число , яке не перевищує x, дробовою частиною $\{x\}$ називається різниця $x-[x]$**.**

Властивості :

1. $0 \le \{x\} < 1$.

2. Якщо $x \in Z$, то $[x] = x, \{x\} = 0$.

3. $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$.

4. $[x + n] = [x] + n$, де $x \in R,\ n \in Z$.

Розглянемо деякі типові рівняння з цілою та дробовою частинами числа .

Приклад 1. **Розв'язати рівняння :**

$$[\boldsymbol{x^3}] + [\boldsymbol{x^2}] + [\boldsymbol{x}] = \{\boldsymbol{x}\} - \mathbf{1}.$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння у вигляді :

$$[x^3] + [x^2] + [x] + 1 = \{x\}.$$

Ліва частина рівняння – число ціле , тому і $\{x\}$ –ціле , але тоді $\{x\} = 0$, звідки робимо висновок ,що x – ціле , тоді x^3, x^2- також цілі і $[x^3] = x^3; [x^2] = x^2; [x] = x$.

Рівняння матиме вигляд :

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0;$$

$$x^2(x+1) + x + 1 = 0;$$

$(x+1)(x^2+1) = 0$, звідки $x = -1$(так як $x^2 + 1 > 0$ при всіх $x \epsilon R$).

Відповідь: **-1.**

Приклад 2. **Розв'язати рівняння :**

$$[\boldsymbol{x^2}] = \mathbf{1} + \mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}.$$

Розв'язання

Відомо ,що $-1 \le \sin x \le 1$, тоді $0 \le 1 + \sin x \le 2$.

Оскільки ліва частина рівняння – ціла , то і права – ціла. Можливі випадки :

$$1)\begin{cases} 1 + \sin x = 0; \\ [\boldsymbol{x^2}] = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1; \\ x \epsilon (-1; 1); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z; \\ x \epsilon (-1; 1); \end{cases} \Rightarrow x \epsilon \emptyset.$$

$$2)\begin{cases} 1 + \sin x = 1; \\ [\boldsymbol{x^2}] = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0; \\ x \epsilon (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}); \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \epsilon Z; \\ x \epsilon (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow x \epsilon \emptyset.$$

3) $\begin{cases} 1 + \sin x = 2; \\ [x^2] = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1; \\ x \epsilon (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{3}); \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \epsilon Z; \\ x \epsilon (-\sqrt{3}; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$**.**

Приклад 3. Розв'язати рівняння :
$\boldsymbol{x^2 - 3x - 4 = [\sin x]}$.

Розв'язання

Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$, то $[\sin x]$ може приймати лише значення -1;0;1.Тому розглянемо такі випадки :

1) $[\sin x] = -1$, тоді

$-1 \le \sin x < 0$, $x \epsilon [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n) = I, n \epsilon Z.$

Отримуємо рівняння :

$x^2 - 3x - 4 = -1, x^2 - 3x - 3 = 0$, звідки

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \in I; x_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \notin I.$$

2) $[\sin x] = 0$, тоді

$0 \le \sin x < 1$, $x \epsilon [0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n) = J, n \epsilon Z.$

Отримуємо рівняння :

$x^2 - 3x - 4 = 0,$ звідки

$x_1 = 4 \notin J; x_2 = -1 \notin J.$

3) $[\sin x] = 1,$ тоді

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Отримуємо рівняння :

$x^2 - 3x - 4 = 1,$ звідки $x^2 - 3x - 5 = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідь: $\mathbf{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння :

$$[\mathbf{2x}] + [\mathbf{5x}] = \mathbf{9}.$$

Розв'язання

Використовуючи властивість цілої частини , маємо:

$$2x - 1 < [2x] \leq 2x$$

$$5x - 1 < [5x] \leq 5x;$$ звідки

$$7x - 2 < [2x] + [5x] \leq 7x,$$

тоді розв'язки рівняння повинні задовольняти умови :

$$\begin{cases} 7x - 2 < 9, \\ 7x \geq 9; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x < 11, \\ 7x \geq 9; \end{cases} \Rightarrow x\epsilon \left[1\frac{2}{7}; 1\frac{4}{7}\right)$$

Далі :

$$\frac{18}{7} \leq 2x < \frac{22}{7},$$

$[2x] = 2$ або $[2x] = 3;$

$$\frac{45}{7} \leq 5x < \frac{55}{7}.$$

$[5x] = 6$ або $[5x] = 7$.

Проте 2+7=9, отже , рівняння задовольняють ті x, при яких

$$\frac{18}{7} \leq 2x < 3\,,$$
$$7 \leq 5x < \frac{55}{7}.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{7}{9} \leq x < \frac{2}{3}, \\ \frac{7}{5} \leq x < \frac{11}{7}; \end{cases} \Rightarrow x\epsilon\left[1\frac{2}{5};\,1{,}5\right).$$

Відповідь: $\boldsymbol{x\epsilon[1,4;\,1,5)}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння :

$$[\boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{2x}] + [\boldsymbol{3x}] = \boldsymbol{3}.$$

Розв'язання

Оцінимо кожен данок у лівій частині . Отримаємо :

$$x - 1 < [x] \leq x,$$
$$2x - 1 < [2x] \leq 2x,$$
$$3x - 1 < [3x] \leq 3x.$$

Тоді $\qquad 6x - 3 < [x] + [2x] + [3x] \leq 6x$.

Рівняння має розв'язки , якщо x задовольняє умови:

$$\begin{cases} 6x - 3 < 3, \\ 6x \geq 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x < 6 \\ x \geq 0{,}5; \end{cases} \Rightarrow x\epsilon[0{,}5;\,1).$$

Далі :

$$1 \leq 2x < 2,\ 1{,}5 \leq 3x < 3, \text{тоді } [x] = 0,\ [2x] = 1\,,$$
$$[3x] = 1 \text{ або } [3x] = 2.$$

Рівність виконується , якщо $[3x] = 2,$ тоді

$2 \le 3x < 3,$ або $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right).$

Відповідь: $\boldsymbol{x} \in \left[\frac{2}{3}; 1\right).$

Приклад 6. Розв'язати рівняння :

$$[19x] + 98[x] = 1998.$$

Розв'язання

Оцінимо значення виразів , які стоять у лівій частині рівняння :

1)$x - 1 < [x] \le x$, тоді

$98x - 98 < 98[x] \le 98x;$

2)$19x - 1 < [19x] \le 19x,$ тоді , додавши почленно дві останні нерівності , отримаємо :

$117x - 99 < [19x] + 98[x] \le 117x.$

Розв'язки рівняння повинні задовольняти умови :

$$\begin{cases} 117x - 99 < 1998, \\ 117x \ge 1998, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 117x < 2097, \\ 117x \ge 1998. \end{cases}$$

Отже,

$$\frac{1998}{117} \le x < \frac{2097}{117} \text{ або } 17\frac{1}{13} \le x < 17\frac{12}{13} (*).$$

З останньої нерівності знаходимо , що

$$[x] = 17, \text{тоді } 98[x] = 1666.$$

$$\frac{222 \cdot 19}{13} \le 19x < \frac{233 \cdot 19}{13} \text{ або}$$

$$324{,}46 \le 19x < 340{,}54, \text{тоді}$$

$$[19x] = 324{,}325\ {,}326, \dots {,}340.$$

Але, $332+1666=1998$, тоді візьмемо лише ті значення x, для яких $332 \le 19x < 333$. Отримаємо систему з урахуванням умови $(*)$:

$$\begin{cases} 17\frac{1}{13} \le x < 17\frac{12}{13}, \\ 17\frac{9}{19} \le x < 17\frac{10}{19}, \end{cases} \Rightarrow x\epsilon\left[17\frac{9}{19}; 17\frac{10}{19}\right).$$

Відповідь: $\boldsymbol{x\epsilon\left[17\frac{9}{19}; 17\frac{10}{19}\right)}$**.**

Приклад 7. Розв'язати рівняння :

$$\mathbf{1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}}$$

Розв'язання

ОДЗ: $\boldsymbol{x\neq 1}$**.**

Розглянемо випадки :

1) $x\epsilon(-\infty;-1)$. Тоді із даного отримаємо рівняння :

$$1+x+1=\frac{[x]-x}{1-x},$$

$$(x+2)(1-x)=[x]-x,$$

$$-x^2-x+2+x=[x].$$

$[x]-2=-x^2 \Rightarrow x$-ціле. Тоді

$$x^2+x-2=0,$$

$$x_1=-2\epsilon(-\infty;-1);$$

$$x_2=1-\text{сторонній}.$$

2) $x\epsilon[-1;1)$. Маємо рівняння :

$$1 - x - 1 = \frac{[x] - x}{1 - x}$$

$$-x(1 - x) = [x] - x,$$

$$-x + x^2 + x = [x]$$

$[x] = x^2; \Rightarrow x$-ціле.

$$x^2 = x, x^2 - x = 0, x(x - 1) = 0,$$

звідки з урахуванням ОДЗ:

$$x = 0.$$

3) $x \epsilon (1; +\infty)$.Розв'яжемо рівняння :

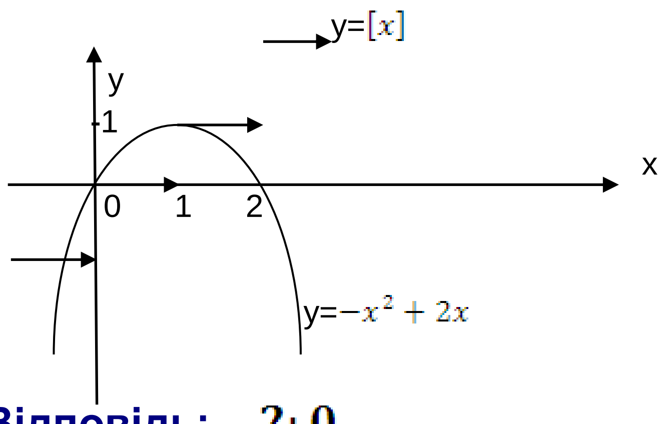
$$1 - x - 1 = \frac{[x] - x}{x - 1}$$

$$-x(x - 1) = [x] - x$$

$$-x^2 + x + x = [x]$$

$$-x^2 + 2x = [x].$$

Це рівняння немає розв'язків на вказаному проміжку,що доцільно проілюструвати на графіку :



Відповідь: $-2; 0$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння :

$$\left[\frac{x+3}{4}\right] = \{2x - 1\}.$$

Розв'язання

$\left[\frac{x+3}{4}\right]-$ ціле, тоді і $\{2x-1\}-$ також ціле і $\{2x-1\}=0.$

$2x-1$-ціле . Позначимо $2x-1=m;\ \Rightarrow 2x=m+1;\Rightarrow$

$$x=\frac{m+1}{2}.$$

$$\left[\frac{x+3}{4}\right]=0\Rightarrow 0\le\frac{x+3}{4}<1\Rightarrow 0\le x+3<4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3\le x<1,\text{ тоді}$$

$$-3\le\frac{m+1}{2}<1,\text{звідки } -7\le m<1.$$

Для усіх значень m з отриманого проміжка отримаємо :

$$x\epsilon\{-3;-2{,}5;-2;-1{,}5;-1;-0{,}5;0;0{,}5\}$$

Відповідь: $\boldsymbol{x\epsilon\{-3;-2,5;-2;-1,5;-1;-0,5;0;0,5\}}$

Приклад 9. Довести, що виконується рівність :

$$\boldsymbol{[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]}$$

Розв'язання

Розглянемо проміжок $x\epsilon[m;m+1)$,де m- довільне ціле у таких випадках :

Нехай :

1) $m\le x<m+0{,}5$, де m- довільне ціле.

Тоді $[x]=m;\ \left[x+\frac{1}{2}\right]=m,$

$2m\le 2x<2m+1$,тому

$$[2x] = 2m.$$

В цьому випадку рівність доведена .

2) $m + 0{,}5 \le x < m + 1.$

$$[x] = m; \left[x + \tfrac{1}{2}\right] = m + 1.$$

$$2m + 1 \le 2x < 2m + 2$$

$$[2x] = 2m + 1.$$

Правильність рівності і в цьому випадку очевидна . Оскільки m- довільне ціле , то рівність доведена для довільних значень x.

Приклад 10. **Розв’язати рівняння :**

$$\left[\boldsymbol{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right] + [\boldsymbol{x}] = \frac{\boldsymbol{x}^{6}}{\mathbf{2}}$$

Розв’язання

Використовуючи результат попереднього прикладу , отримаємо рівняння :

$[2x] = \frac{x^6}{2}$, звідки $x^6 = 2[2x]$,але $2[2x] -$ ціле , тоді і $x^6 -$ також ціле , тому і $x -$ ціле , $2[2x] = 4x.$

Отримаємо рівняння : $x(x^5 - 4) = 0$, звідки

$x = 0$; або $x^5 - 4 = 0$, $x = \sqrt[5]{4} -$ не ціле.

Відповідь: $\mathbf{0}$.

Приклад 11. **Розв’язати рівняння :**

$$-\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}} + \mathbf{3} = \sqrt{\mathbf{8}\{\boldsymbol{x}\} + \mathbf{1}}$$

Розв’язання

Використаємо той факт , що $0 \le \{x\} < 1$, тоді

$$1 \le 8\{x\} + 1 < 9, \text{а } 1 \le \sqrt{8\{x\}+1} < 3.$$

Тоді :

$$\begin{cases} -\dfrac{[x]}{2} + 3 \ge 1, \\ -\dfrac{[x]}{2} + 3 < 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x] \le 4, \\ [x] > 0, \end{cases} \text{або}$$

$$0 < [x] \le 4.$$

Розглянемо випадки :

1) $[x] = 1, \text{тобто } 1 < x \le 2$. Отримаємо рівняння :
$2{,}5 = \sqrt{8\{x\}+1}$, $8\{x\} + 1 = 6{,}25$, $8\{x\} = 5{,}25$,звідки
$\{x\} = \dfrac{21}{32}$.
Тоді $x = [x] + \{x\} = 1\frac{21}{32}$.

2)$[x] = 2$. Маємо :
$\sqrt{8\{x\}+1} = 2$, $8\{x\} + 1 = 4$, $\{x\} = \frac{3}{8}$.
Тоді $x = [x] + \{x\} = 2\frac{3}{8}$.

3) $[x] = 3$. Рівняння у цьому випадку :
$\sqrt{8\{x\}+1} = 1.5$; $8\{x\} + 1 = 2{,}25$; $\{x\} = \frac{5}{32}$.
Тоді $x = [x] + \{x\} = 3\frac{5}{32}$.

4) $[x] = 4$. Отримаємо :
$\sqrt{8\{x\}+1} = 1$; $8\{x\} + 1 = 1$; $\{x\} = 0$.
Тоді $x = [x] + \{x\} = 4$.

Відповідь: $\mathbf{1\frac{21}{32}; 2\frac{3}{8}; 3\frac{5}{32}; 4}$.

Приклад 12. **Розв'язати рівняння :**

$$[3x^2] - [2x] + 1 = 0.$$

Розв'язання

Оцінимо значення перших двох доданків :

$3x^2 - 1 < 3x^2 \le 3x^2,$

$2x - 1 < [2x] \le 2x,$ тоді

$-2x \le -[2x] < -2x + 1.$

Далі отримуємо :

$3x^2 - 2x \;< [3x^2] - [2x] + 1 \le.$

Маємо систему умов :

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x < 0, \\ 3x^2 - 2x + 2 \ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\epsilon\left(0; \dfrac{2}{3}\right), \\ x\epsilon R; \end{cases} \Rightarrow x\epsilon\left(0; \frac{2}{3}\right).$$

Далі :

$$0 < 2x < \frac{4}{3}, \Rightarrow [2x] = 0 \text{ або } 1;$$

$$0 < 3x^2 < \frac{4}{3}, \Rightarrow [3x^2] = 0 \text{ або } 1.$$

Рівність виконується , якщо $[3x^2] = 0$ і $[2x] = 1,$ тобто виконуються умови :

$$\begin{cases} 1 \le 2x < \dfrac{4}{3}, \\ 0 < 3x^2 < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2} \le x < \dfrac{4}{3}, \\ |x| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \end{cases} \Rightarrow x\epsilon\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Відповідь: $\boldsymbol{x}\epsilon\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right).$

Приклад 13. **Розв'язати рівняння :**

$$[x]\{x\} + 10[x] = 16 + 2\{x\}.$$

Розв'язання

Перепишемо рівняння у вигляді :

$$[x]\{x\} - 2\{x\} = 16 - 10[x],$$

$$\{x\}([x] - 2) = 16 - 10[x],$$

$$\{x\} = \frac{16 - 10[x]}{[x] - 2}.$$

Оскільки $0 \le \{x\} < 1$, то

$$0 \le \frac{16 - 10[x]}{[x] - 2} < 1.$$

Нехай $[x] = t, t \in Z$, тоді отримуємо ситему :

$$\begin{cases} \dfrac{16 - 10t}{t - 2} \ge 0; \\ \dfrac{16 - 10t}{t - 2} < 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5t - 8}{t - 2} \le 0; \\ \dfrac{16 - 10t - t + 2}{t - 2} < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5t - 8}{t - 2} \le 0; \\ \dfrac{-11t + 18}{t - 2} < 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t \epsilon [1{,}6; 2); \\ t \epsilon \left(-\infty; 1\dfrac{7}{11}\right) \cup (2; +\infty); \end{cases} \Rightarrow t \epsilon \left[1{,}6; 1\frac{7}{11}\right).$$

Але $t \in Z$, а в проміжку $t \epsilon \left[1{,}6; 1\frac{7}{11}\right)$ цілих чисел немає .
Отже , рівняння не має розв'язків .

Відповідь: **рівняння не має розв'язків.**