Т. В. Дідківська,
кандидат фізико-математичних наук, доцент;
І. А. Сверчевська,
кандидат педагогічних наук, доцент
(Житомирський державний університет імені Івана Франка)
iryna_sver@ukr.net

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

Під методами розв'язування нелінійних систем ми розуміємо різні способи перетворення цих систем, які дають можливість виключити невідомі та прийти до розв'язування алгебраїчного рівняння з одним невідомим. Причому ці способи залежать від особливостей системи. Щоб розв'язати поставлене завдання студенти повинні вміти провести аналіз умови, висунути ідею розв'язування системи, критично осмислити відомі способи, зосередити увагу, спрогнозувати результати, знайти додаткову інформацію. Така діяльність розвиває математичні здібності, сформованість яких лежить в основі розвитку творчих здібностей та інтелектуальних умінь. Ми пропонуємо поповнювати індивідуальний банк математичних методів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь засобами історії математики. Для цього ми проаналізували різні підходи до розв'язування таких систем у визначних математичних задачах математиків різних часів від єгипетських папірусів, вавилонських клинописних табличок до розробок математиків XVI – XVIII століть.

Наведемо приклади деяких нелінійних систем у визначних математичних задачах.

1. Вавилонська задача [1, с. 53].

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}.$$

Вавилонський математик застосовує лінійні підстановки: $x = \frac{1}{2}b + t$; $y = \frac{1}{2}b - t$ і зводить розв'язування системи до двочленного квадратного рівняння $t^2 = \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Ймовірно він прийшов до цього правила наступним чином $x = \frac{b}{2} + t$, $y = \frac{b}{2} - t$. З першого рівняння: $\left(\frac{b}{2} + t\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - t\right)^2 = a$. Залежність $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ була відома вавилонянам, тому $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + bt + t^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - bt + t^2 = a$; $2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2t^2 = a$; $t^2 = \frac{a}{2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

2. Задача Діофанта з трактату "Арифметика" [2, с. 129].

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}.$$

Діофант розв'язує цю систему за допомогою введення допоміжного невідомого $\frac{x-y}{2} = z$. Оскільки $\frac{x+y}{2} = 5$, то з цих двох умов одержує $x = 5 + z$, $y = 5 - z$. Підставляючи в друге рівняння, визначає $z = 3$. Отже, $x = 8$, $y = 2$.

3. Задача Абу Каміла й Леонардо Фібоначчі.

Розв'язати систему рівнянь [3, с. 376]

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 6\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Обидва математики спочатку доводять, що $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{y}$, якщо $a=x+y$. Абу Камiл у другому рiвняннi замiнює $10=x+y$ та одержує квадратне рiвняння вiдносно $\frac{y}{x}$, з якого визначає $\frac{y}{x}=4$. З першого рiвняння знаходить $x=2$, тодi $y=8$.

Леонардо Фiбоначчi пропонує новий цiкавий спосiб. Вiн позначає одну частину $2-z$, а iншу $8+z$, тодi перше рiвняння задовольняється, з другого рiвняння одержує $xy=16$ або $(2-z)(8+z)=16$, $z^2+6z=0$. Вiн вибирає $z=0$, тодi $x=2-z=2$, $y=8+z=8$. Ймовiрно це перший випадок застосування кореня, рiвного нулю. Корiнь $z=-6$ Леонардо не розглядає.

Зауважимо, що обидва математики не розглядають другий випадок $x=8, y=2$.

При практичному розв'язуваннi зi студентами цих систем доцiльно розглянути iсторичнi довiдки про математикiв [4]. А також застосовувати сучаснi методи пiдстановки, алгебраїчного додавання, використання результанта многочленiв. При цьому знайомство з методами, запропонованими визначними математиками рiзних часiв допоможе зробити навчання математики творчим, цiкавим, розв'язувати одну i ту ж задачу рiзними способами.

Лiтература

1. Дiдкiвська Т. В., Сверчевська I. А. Системи рiвнянь у старовинних задачах / Т. В. Дiдкiвська, I. А. Сверчевська // Вiсник Житомирського державного унiверситету iменi Iвана Франка. – 2016. – Вип. 3 (85). – С. 51 – 56.
2. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математики / В. Д. Чистяков. – Минск: Высшая школа, 1978. – 270 с.
3. Юшкевич А. П. История математики в средние века / А. П. Юшкевич. – М.: Госиздат физико-математической литературы, 1961. – 448 с.
4. Бородiн О.I., Бугай А.С. Бiографiчний словник дiячiв у галузi математики / О.I. Бородiн, А.С. Бугай. – К.: Вища шк. , 1973. – 552 с.

Анотацiя. Дiдкiвська Т. В., Сверчевська I. А. Методи розв'язування нелiнiйних алгебраїчних систем.

Виокремлено основi методи розв'язування нелiнiйних систем алгебраїчних рiвнянь. Пропонується поповнити iндивiдуальний банк математичних методiв розв'язування таких систем засобами iсторiї математики. Для цього проаналiзовано рiзнi пiдходи до розв'язування нелiнiйних систем алгебраїчних рiвнянь у визначних математичних задачах математикiв рiзних часiв. Наведено приклади розв'язування деяких систем авторськими методами та здiйснено порiвняльний аналiз цих методiв.

Ключовi слова: метод розв'язування, нелiнiйнi системи, банк методiв, iсторичнi задачi, лiнiйнi пiдстановки, квадратне рiвняння, авторський метод.

Аннотация. Дидковская Т. В., Сверчевская И. А. Методы решения нелинейных алгебраических систем.

Выделено основные методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений. Предлагается пополнить индивидуальный банк математических методов решения таких систем средствами истории математики. Для этого проанализировано разные подходы к решению нелинейных систем алгебраических уравнений в замечательных математических задачах математиков разных времен. Приведено примеры решения некоторых систем авторскими методами и выполнен сравнительный анализ этих методов.

Ключевые слова: метод решения, нелинейные системы, банк методов, исторические задачи, линейные подстановки, квадратное уравнение, авторский метод.

Summary. Dydkivska T. V., Sverchevska I. A. Methods of solving systems of nonlinear algebraic equations.

Basic methods of systems of nonlinear algebraic equations solving are listed. We suggest appending an individual bank of mathematical methods used for solving of such systems, drawing on the history of mathematics. To that end, we analyse various approaches to solving systems of nonlinear algebraic equations, given in famous mathematical problems. We also provide examples of solving some problems using some authoring methods, followed by a comparative analysis of these methods.

Keywords: method of solving, nonlinear equations, a bank of methods, historical problems, linear substitution, quadratic equation, authoring method.